PERPENDICULAR COMÚN Y DISTANCIAS

1) Halla la recta perpendicular común a las rectas $r: \begin{cases} x = 0 \\ y - 1 = \dfrac{z-2}{-3} \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x - 1 = \dfrac{z-1}{-1} \\ y = 0 \end{cases}$

2) Distancia entre las rectas r y s del ejercicio anterior.

3) Distancia entre las rectas $r: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z}{4}$ y $s: x+1 = \dfrac{2(y-3)}{3} = \dfrac{z-1}{2}$

SOLUCIONES

1) Los pasos a seguir son:

a. Posición relativa de r y s

b. vector $\vec{n}$ perpendicular a r y s

c. Plano π que contiene a la recta r y al vector $\vec{n}$

d. Plano π' que contiene a la recta s y al vector $\vec{n}$

e. La recta perpendicular común a r y s es la intersección de los plano anteriores.

a) $r:\begin{cases} x=0 \\ y=1+t \\ z=2-3t \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{d_r}=(0,1,-3);\quad s:\begin{cases} x=1+t \\ y=0 \\ z=1-t \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{d_s}=(1,0,-1)$

$\begin{cases} 0=1+t' \\ 1+t=0 \\ 2-3t=1-t' \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t'=-1 \\ t=-1 \\ 5=2 \end{cases} \rightarrow$ Sistema incompatible, las rectas se cruzan (vectores directores no proporcionales).

b) $\vec{n}=\overrightarrow{d_r}x\overrightarrow{d_s}=(0,1,-3)x(1,0,-1)=\left(\begin{vmatrix}1 & -3\\ 0 & -1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-3 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\right)=(-1,-3,-1)$

c) Del plano π conocemos un punto P_r (0,1,2) y los vectores $\overrightarrow{d_r}$ y $\vec{n}$

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}=0 \rightarrow 10x-3y-z+5=0$$

d) Del plano π' conocemos un punto P_s (1,0,1) y los vectores $\overrightarrow{d_s}$ y $\vec{n}$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}=0 \rightarrow 3x-2y+3z-6=0$$

e) La recta perpendicular común es: $\begin{cases} 10x-3y-z+5=0 \\ 3x-2y+3z-6=0 \end{cases}$

2) **Primer método:**

Como r y s se cruzan hay que hallar:

a. Un plano π que contenga a r y sea paralelo a s

b. Distancia de r a s es igual a la distancia de un punto de s al plano π.

a) $r:\begin{cases} x=0 \\ y=1+t \\ z=2-3t \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{d_r}=(0,1,-3);\quad s:\begin{cases} x=1+t \\ y=0 \\ z=1-t \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{d_s}=(1,0,-1),\quad P_s=(1,0,1)$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=0 \rightarrow \pi \equiv x+3y+z-5=0$$

b) $d(P_s,\pi)=\dfrac{|1+0+1-5|}{\sqrt{1^2+3^2+1^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{11}}=\dfrac{3\sqrt{11}}{11}$ u

Segundo método: A partir de la recta r´ perpendicular común a r y s tenemos que hallar:

c. Punto A de intersección de r y r´.
d. Punto B de intersección de s y r´.
e. d(r,s) = d(A,B)

a) Resolver el sistema entre r y r´.
$$r:\begin{cases} x=0 \\ y=1+t \\ z=2-3t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x-3y-z+5=0 \\ 3x-2y+3z-6=0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} 0=0 \\ t=-2/11 \end{matrix} \rightarrow A(0,\frac{9}{11},\frac{28}{11})$$

b) Resolver el sistema entre s y r´.
$$s:\begin{cases} x=1+t \\ y=0 \\ z=1-t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x-3y-z+5=0 \\ 3x-2y+3z-6=0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} t=-14/11 \\ 0=0 \end{matrix} \rightarrow B(\frac{-3}{11},0,\frac{25}{11})$$

c) **d(r,s) =** d(A,B) = $\sqrt{\left(0+\frac{3}{11}\right)^2+\left(\frac{9}{11}-0\right)^2+\left(\frac{28}{11}-\frac{25}{11}\right)^2}=\frac{\mathbf{3\sqrt{11}}}{\mathbf{11}}\mathbf{u}$

3) Primero tenemos que estudiar la posición relativa de r y s, tendremos que resolver el sistema.

$$r:\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z}{4}\rightarrow\begin{cases} x=-1+2t \\ y=3+3t \\ z=4t \end{cases} \quad y \quad s: x+1=\frac{2(y-3)}{3}=\frac{z-1}{2}\rightarrow\begin{cases} x=-1+t \\ y=3+\frac{3}{2}t \\ z=1+2t \end{cases};\rightarrow\begin{cases} -1+2t=-1+t´ \\ 3+3t=3+\frac{3}{2}t´ \\ 4t=1+2t´ \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2t-t´=0 \\ 2t-t´=0 \\ 4t-2t´=1 \end{cases}\rightarrow \begin{matrix} t´=2t \\ 0=1 \end{matrix} \text{ Sistema imcompatible, } \vec{d}_r=(2,3,4), \vec{d}_s=(1,\frac{3}{2},2), \text{ proporcionales} \rightarrow r\ //\ s$$

Por lo tanto la distancia de r a s se halla calculando la distancia de un punto de r a la recta s
Para calcular esta distancia hay que hacer:

a. Plano, π, perpendicular a r (y también a s)que pase por un punto de r (P_r).
b. Intersección del plano con la recta s, B
c. d(r,s) = d(P_r , B)

a) $r:\begin{cases} x=-1+2t \\ y=3+3t \\ z=4t \end{cases}\rightarrow P_r=(-1,3,0),\ \vec{d_r}=(2,3,4)=\vec{n_\pi} \quad y \quad s:\begin{cases} x=-1+t \\ y=3+\frac{3}{2}t \\ z=1+2t \end{cases}\rightarrow \pi\equiv 2(x+1)+3(y-3)+4z=0$

π: 2x + 3y + 4z − 7 = 0

b)
$$\begin{cases} 2x+3y+4z-7=0 \\ x=-1+t \\ y=3+\frac{3}{2}t \\ z=1+2t \end{cases}\rightarrow -2+2t+9+\frac{9}{2}t+4+8t-7=0\rightarrow 29t+8=0\rightarrow t=\frac{-8}{29}\rightarrow$$

B=(-37/29,75/29,13/29) **c)** d(r,s) = d(P_r , B) = $\sqrt{\left(-1-\frac{-37}{29}\right)^2+\left(3-\frac{75}{29}\right)^2+\left(-\frac{13}{29}\right)^2}=\frac{\sqrt{321}}{29}u$